Μαθημα 6ο 16/11/2017

Αριθμ. Γραμ. Αλγ.

Επαναληπτικες Μεθοδοι

$Ax=b$ χωριζουμε τον $A=M-N$ οπου M αντιστρεψιμος, το συστημα με πινακα αγνωστων του M λυνεται με πολυ λιγοτερες πραξεις απο το αρχικο

Το $Ax=b \iff (M-N)x=b \iff Mx=Nx+b$

$Mx^{(k+1)}=Nx^{(k)}+b$, $k=0,1,\dots$ $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$

Αν η ακολουθια $\{x^{(k)}\}$ συγκλινει, θα συγκλινει στη λυση x

$x^{(k+1)}=M^{-1}Nx^{(k)}+M^{-1}b=Tx^{(k)}+c$, $k=0,1,2,\dots$ $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$

Λημμα

Οι δυναμεις ενος πινακα T δηλ. T^k, συγκλινουν στο μηδενικο πινακα ανν $\rho(T)<1$

Αποδειξη

φυσικη νορμα

Εστω οτι $\lim_{k\to\infty}T^k=0$, τοτε $\lim_{k\to\infty}\|T^k\|=0 \iff$

υπαρχει $k_0>0$ τετοιο ωστε $\|T^k\|<1$ $\forall k\geq k_0$

$\Rightarrow (\rho(T))^k=\rho(T^k)\leq\|T^k\|<1 \iff \rho(T)<1$ Δειξαμε το ορθο

→ Αντιστροφα

Εστω $\rho(T)<1$. Για καθε $\varepsilon>0$ υπαρχει φυσικη νορμα τετοια ωστε $\|T\|<\rho(T)+\varepsilon$

Επιλεγω $\varepsilon=\frac{1-\rho(T)}{2}$ τοτε $\|T\|\leq\rho(T)+\frac{1-\rho(T)}{2}=\frac{1-\rho(T)}{2}<1$

$\|T^k\|\leq\|T\|^k$

$\lim_{k\to\infty}\|T^k\|\leq\lim_{k\to\infty}\|T\|^k=0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty}T^k=0$

Θεωρημα συγκλισης

Ικανη και αναγκαια συνθηκη για τη συγκλιση της επαναληπτικης μεθοδου $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$ ειναι $\rho(T)<1$

αποδειξη

Παιρνω σφαλμα $\varepsilon^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x = Tx^{(k)} + c - (Tx+c) =$

{ ② $Ax=b \Rightarrow Mx = Nx + b \Rightarrow x = Tx + c$ }

$= T(x^{(k)} - x) = T\varepsilon^{(k)}$ αρα εχω $\varepsilon^{(k+1)} = T\varepsilon^{(k)}$ δε το γνωριζω

$\varepsilon^{(k)} = T\varepsilon^{(k-1)} = T^2\varepsilon^{(k-2)} = \dots = T^k \varepsilon^{(0)}$, $\varepsilon^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

Πρεπει $\lim_{k\to\infty} \varepsilon^{(k)} = 0 \quad \forall \varepsilon^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

Αρκει να ισχυει για n διανυσματα που αποτελουν βαση του $\mathbb{R}^n$

Επιλεγω τις στηλες του μοναδιαιου I , e^i , $i = 1(1)n$ ως βαση

Τοτε $\lim_{k\to\infty} \varepsilon^{(k)} = 0 \iff \lim_{k\to\infty} T^k e^i = 0$, $i = 1(1)n$

$\iff \lim_{k\to\infty} (T^k)_i = 0$ οπου $(T^k)_i$ την i στηλη του T^k

$i = 1(1)n \iff \lim_{k\to\infty} T^k = 0 \iff \rho(T) < 1$

Πορισμα

Ικανη συνθηκη για τη συγκλιση της επαναληπτικης μεθοδου ειναι $\|T\| < 1$ για καποια φυσικη νορμα

- $\|T^k\| < 1$ για καποια φυσικη νορμα τοτε συγκλινει
  $\rho(T)^k = \rho(T^k) \le \|T^k\| < 1 \Rightarrow$ συγκλινει

Ορισμός

Μέση ταχύτητα σύγκλισης για η επαναλήψεις ως προς μια φυσική νόρμα $\|\cdot\|$ ορίζεται ως

$$R(A^k) = \frac{-\log\|T^k\|}{k}$$

• Ασυμπτωτική ταχύτητα σύγκλισης, ορίζεται ως

$$R_\infty(A) = \log\rho(T)$$

$$\lim_{k\to\infty} R(A^k) = R_\infty(A)$$

Μέθοδος Jacobi

Έχουμε να λύσουμε το σύστημα $Ax=b$, $a_{ii}\neq 0$, $i=1(1)n$

$A=D-L-U$, D: διαγώνιο μέρος, $-L$: κάτω τριγωνικό μέρος και $-U$: άνω τριγωνικό μέρος

$Ax=b \Leftrightarrow (D-L-U)x=b \Leftrightarrow Dx=(L+U)x+b \Leftrightarrow$

$x=\underbrace{D^{-1}(L+U)}_{T_J}x + D^{-1}b \Leftrightarrow Dx^{(k+1)}=(L+U)x^{(k)}+b$

$k=0,1,2,\dots$, $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)/a_{ii}, \quad i=1(1)n, \ k=0,1,2,\dots, \ x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$$

Μέθοδος Gauss-Seidel

$Ax=b$, $a_{ii}\neq 0$, $i=1(1)n$, $A=D-L-U$

$Ax=b \Leftrightarrow (D-L-U)x=b \Leftrightarrow (D-L)x=Ux+b \Leftrightarrow x=\underbrace{(D-L)^{-1}U}_{T_{G-S}}x+(D-L)^{-1}b$

$(D-L)x^{(k+1)}=Ux^{(k)}+b$, $k=0,1,2,\dots$ $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) / a_{ii} \quad , i = 1(1)n$$

$k = 0, 1, 2, \ldots \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

Παρατηρηση

Δυο πινακες A και B λεγονται ομοιοι αν υπαρχει αντιστρεψιμος πινακας C τ.ω $A = CBC^{-1} \Leftrightarrow B = C^{-1}AC$

Θεωρημα

Αν $A, B \in \mathbb{R}^n$ ομοιοι τοτε $\sigma(A) = \sigma(B)$ συνολο ιδιοτιμων

$$A = CBC^{-1} = C\underbrace{SJS^{-1}}C^{-1} = \overbrace{CS}^{S'}J(CS)^{-1} = S'JS'^{-1}$$

κανονικη μορφη πινακα Jordan

$B = SJS^{-1}$

$Ax = \lambda x \Leftrightarrow CBC^{-1}x = \lambda x \Leftrightarrow BC^{-1}x = \lambda C^{-1}x$

το $C^{-1}x$ θα ειναι ιδιοδιανυσμα με λ ιδιοτιμη

Θεωρημα

Εστω $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με εναν απο τους δυο αντιστρεψιμους

Τοτε $\sigma(AB) = \sigma(BA)$

αποδειξη

Εστω A αντιστρεψιμος τοτε

$AB = ABAA^{-1} \Rightarrow AB$ και BA ομοιοι πινακες

$\Rightarrow \sigma(AB) = \sigma(BA)$

Αν A, B μη αντιστρέψιμοι παίρνω $A(\varepsilon)$ μια προσέγγιση του A

$\lim_{\varepsilon \to 0} A(\varepsilon) = A$ και $A(\varepsilon)$ αντιστρέψιμος τότε

$$\sigma(A(\varepsilon) \cdot B) = \sigma(BA(\varepsilon))$$

$\lim_{\varepsilon \to 0} (A(\varepsilon) \cdot B) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sigma(BA(\varepsilon)) \Leftrightarrow \sigma(AB) = \sigma(BA)$ ισχύει

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,k}$, $B \in \mathbb{R}^{k,n}$ τότε $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$

Αν $n > k$ τότε ο AB έχει τουλάχιστον $n-k$ ιδιοτιμές 0

παράδειγμα

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $B = (1 \quad 1)$ τότε $AB = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{rank}=1}$

$\sigma(AB) = \{2, 0\}$, $BA = [2]$ και $\sigma(BA) = \{2, 0\}$

$$\det(AB - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$(1-\lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda-1)(1-\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(-\lambda+2) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 2$ (ιδιοτιμές)

Ορισμός

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και λέγεται διαγώνια υπέρτερος (κυρίαρχος)

κατά γραμμές αν $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$, $i = 1(1)n$ και

κατά στήλες αν $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ji}|$, $i = 1(1)n$

Θεωρημα

Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ειναι αυστηρα διαγωνια υπερτερος κατα γραμμες ή κατα στηλες, τοτε ειναι αντιστρεψιμος.

αποδειξη

Εστω A αυστηρα διαγωνιος υπερτερος και ειναι μη αντιστρεψιμος

Τοτε υπαρχει $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ τ.ω $Ax=0$

Εστω $x_i \neq 0$ τοτε $(Ax)_i = 0 \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \iff$

$$a_{ii} x_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \iff a_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \Rightarrow$$

$$|a_{ii}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \left| \frac{x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \text{ ατοπο}$$

- Αν A αυστηρα διαγωνιος υπερτερος κατα στηλες τοτε A^T ειναι κατα γραμμες

- Αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αυστηρα διαγωνια υπερτερος κατα γραμμες ή κατα στηλες τοτε οι μεθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel συγκλινουν

αποδειξη

Εστω A αυστηρα διαγ. υπερτ. κατα γραμμες τοτε $T_J = D^{-1}(L+U)$

$$T_J = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{11} \\ & & & & \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|T_j\|_\infty = \max_i \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right\} = \max_i \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < 1$$

$\Rightarrow \|T_j\|_\infty < 1$ αρα συγκλινει

για κατα στηλες

$$\sigma(T_j) = \sigma(D^{-1}(L+U)) = \sigma((L+U)D^{-1}) = \sigma(J_j')$$